

9. ÜBUNGSBLATT
Prof. Stefan Friedl PhD

Abgabe spätestens bis *Donnerstag den 19. Dezember* um 12 Uhr.

Aufgabe 1.

- (a) Es sei E eine Ebene mit Strecken und Bewegungen, so dass die Axiome D1 und D2 gelten. Eine *Drehung an einem Punkt P um den Winkel $\alpha \in (0, \pi)$* ist eine Bewegung $m: E \rightarrow E$, so dass $m(P) = P$, und so dass für jeden Strahl s , welcher von P ausgeht, gilt, dass s und $m(s)$ den Winkel α aufspannen.
Zeigen Sie, dass es zu jedem Punkt $P \in E$ und jedem Winkel $\alpha \in (0, \pi)$ genau eine Drehung um P mit Winkel α gibt.
Hinweis: wie könnte man eine Drehung mithilfe von Spiegelungen definieren?
- (b) Zeigen Sie, dass die elliptischen Abbildungen auf $\mathbb{H}$ gerade Drehungen in $\mathbb{H}$ sind.

Aufgabe 2. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft, dass $\text{Isom}(M, g)$ transitiv auf M operiert, d.h. für alle $P, Q \in M$ gibt es eine Isometrie f von (M, g) mit $f(P) = Q$. Zeigen Sie, dass (M, g) vollständig ist, d.h. zeigen Sie, dass es zu jeder Geodäte $f: I \rightarrow M$ mit $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, eine Geodäte $F: \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $F|_I = f$ gibt.

Aufgabe 3.

- (a) Es seien g, h Riemannsche Metriken auf $\mathbb{R}$. Sind die Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(\mathbb{R}, g)$ und $(\mathbb{R}, h)$ notwendigerweise isometrisch?
- (b) Es seien g, h Riemannsche Metriken auf S^1 . Sind die Riemannschen Mannigfaltigkeiten (S^1, g) und (S^1, h) notwendigerweise isometrisch?

Begründen Sie in beiden Fällen Ihre Antworten.

Aufgabe 4. Es sei $a > 0$. Wir betrachten die Operation

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) &\mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (k, x) &\mapsto a^k x \end{aligned}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass dies eine diskrete Operation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.
- (b) Finden Sie einen Homöomorphismus von $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$ zu einer deutlich bekannteren 1-Mannigfaltigkeit.